



Edição Especial

III Congresso Internacional de Ensino - CONIEN
Universidade do Minho - Braga, Portugal, 2024

AS FORMAS OPERATÓRIA E PREDICATIVA DO CONHECIMENTO RELATIVAS À FUNÇÃO AFIM

OPERATORY AND PREDICATE KNOWLEDGE FORMS REGARDING THE AFFINE
FUNCTION

Leonardo Ferreira Zanatta¹
Veridiana Rezende²

Resumo

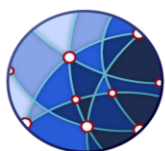
Do ponto de vista da Teoria dos Campos Conceituais, o conhecimento se apresenta em duas formas indissociáveis, a forma operatória do conhecimento e a forma predicativa do conhecimento. Isoladamente, essas formas não são suficientes para se obter a conceitualização. Assim, esta pesquisa busca analisar manifestações das formas operatória e predicativa relativas ao conceito de função afim, por estudantes de um Curso de Licenciatura em Matemática do Brasil. Tal objetivo foi dividido em dois procedimentos principais: analisar as interações dialógicas estabelecidas entre os participantes da pesquisa; e analisar os esquemas apresentados pelos participantes da pesquisa ao resolverem as situações-problema propostas. Para tanto, foi elaborado um instrumento de pesquisa com vistas a fomentar manifestações de ambas as formas do conhecimento. O instrumento foi implementado a quatro estudantes do 3º ano de Licenciatura em Matemática. Como resultados, associado à forma operatória do conhecimento, foram identificados junto aos participantes da pesquisa onze teoremas em ação relacionados ao conceito de função, sendo dez teoremas em ação verdadeiros e um falso. Quanto à forma predicativa do conhecimento, foram identificados quatro momentos em que se encontraram indícios de mobilizações do conhecimento predicativo, presentes tanto em falas dos estudantes, quanto em seus protocolos.

Palavras chave: Função Afim; Conhecimento Operatório; Conhecimento Predicativo.

¹ Universidade Estadual do Paraná - Unespar.

² Universidade Estadual do Paraná - Unespar.

REPPE: Revista do Programa de Pós-Graduação em Ensino
Universidade Estadual do Norte do Paraná, Cornélio Procópio (PR), v. 8, n. 2, p. 1180-1207, 2024
ISSN: 2526-9542



III CONIEN
Congresso Internacional de Ensino
PESQUISAS NA ÁREA DE ENSINO:
IMPACTOS, COOPERAÇÕES E VISIBILIDADE

DE 4 A 6 DE SETEMBRO
BRAGA - PORTUGAL



Abstract

From the perspective of the Theory of Conceptual Fields, knowledge is presented in two inseparable forms: the operative form of knowledge and the predicative form of knowledge. In isolation, these forms are not sufficient to obtain conceptualization. This research aims to analyze manifestations of the operative and predicative forms related to the concept of affine function, by students of the Mathematics Licentiate Course. To achieve this goal, we seek to: analyze the dialogical interactions established between the research participants; and analyze the schemes presented by the research participants when solving the proposed problem situations. To this end, a research instrument was developed with a view to promoting manifestations of both forms of knowledge. The instrument was implemented with four students in the 3rd year of the Mathematics Licentiate Course. As results, associated with the operative form of knowledge, eleven theorems in action associated with the concept of function were identified among the research participants, being ten true theorems in action and one false. As for the predicative form of knowledge, four moments were identified when there were indications of mobilizations of predicative knowledge, present both in the students' speeches and in their protocols.

Keywords: Affine Function; Operative Knowledge; Predictive Knowledge.

Introdução

As funções estão presentes no ensino de Matemática desde os Anos Iniciais e devem ser desenvolvidas ao longo de toda escolarização (Brasil, 2018). Trata-se de um conceito de natureza complexa que se desenvolveu ao longo da história de maneira lenta e gradual. Ideias matemáticas e outros conceitos que o sustentam foram se desenvolvendo ao longo de mais de dois mil anos, quais sejam: números, conjuntos, continuidade, infinito, domínio, imagem, variável, dependência, generalização, correspondência, eixos, coordenadas, dentre outros (Merli, 2022).

No currículo brasileiro, noções do conceito de função estão presentes desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental e são gradativamente aprofundadas ao longo da escolarização do estudante. A partir do 9º ano do Ensino Fundamental, o conceito de função é formalmente apresentado, sendo aprofundado no Ensino Médio (Brasil, 2018). Conforme estabelecido pela Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica, ou BNC-Formação (Brasil, 2019), o processo formativo do Licenciando em Matemática deve necessariamente perpassar pelas competências e habilidades previstas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para a Educação Básica, ou seja, o estudo de funções, respectivas habilidades e competências devem ser contempladas no Ensino Superior.

Caraça (1998) considera o conceito de função como essencial para a Matemática, o que reforça a necessidade de que este conceito seja estudado ao longo do processo escolar pelos alunos. Todavia, diversas pesquisas apontam para a dificuldade entre os estudantes, sejam eles do Ensino Fundamental, Médio e mesmo do Ensino Superior, em relação à compreensão do conceito de função (Nunes; Santana, 2017; Pires; Merline; Magina, 2015; Pavan, 2010; Bernardino *et al.*, 2019; Rezende; Nogueira; Calado, 2020; Zanatta; Rezende, 2022).

Ainda acerca do estudo de um conceito ao longo da escolarização de um indivíduo, Vergnaud (2009a, 1996a) enfatiza a relevância dos conhecimentos tácitos evidenciados por meio das ações dos indivíduos diante de uma situação. Na Teoria dos Campos Conceituais (TCC), Vergnaud descreve que o conhecimento se apresenta em duas formas indissociáveis, a forma operatória do conhecimento e a forma predicativa do conhecimento, compreendidas, inicialmente, como o saber fazer e o saber explicar, respectivamente (Pastré; Mayen; Vergnaud, 2019). Tais conhecimentos estão relacionados intimamente àquilo que Vergnaud (2008a, 2009b, 2019) define como esquema, sendo este a organização invariante da atividade para uma determinada classe de situações.

Nesse sentido, com a investigação aqui proposta, busca-se alcançar o seguinte objetivo: analisar manifestações das formas operatória e predicativa relativas ao conceito de função afim, por estudantes de um Curso de Licenciatura em Matemática do Brasil. Para tanto, foram analisadas as interações dialógicas estabelecidas entre os participantes da pesquisa assim como foram analisados os esquemas apresentados pelos participantes da pesquisa ao resolverem a situação-problema proposta.

Diante disso, a investigação apresentada neste texto refere-se à análise de manifestações das formas operatória e predicativa por estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática durante a resolução de uma situação-problema de função afim, e faz parte dos primeiros resultados da investigação de Mestrado do primeiro autor, sob a orientação da segunda autora.

Aporte teórico

Vergnaud (1993, p. 1) afirma que a Teoria dos Campos Conceituais “[...] busca propiciar uma estrutura coerente e alguns princípios básicos ao estudo do

desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas”. Em outra passagem, Vergnaud (1996a, p. 11) reitera que sua teoria foi desenvolvida “[...] para melhor compreender os problemas de desenvolvimento específico no interior de um mesmo campo de conhecimento”. Nas definições quanto aos objetivos da TCC, embora existam algumas variações, há uma ideia que sempre as permeiam: a TCC trata do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas.

Ao abordar a aprendizagem de competências complexas, Vergnaud (2009b) afirma que, tanto competências, quanto concepções se referem ao conhecimento. Ademais, Vergnaud (2000) afirma que as competências se relacionam à forma operatória do conhecimento, aquela que permite aos sujeitos agirem e terem êxito em uma situação. Portanto, a competência é diagnosticada pela ação do aluno perante uma situação e pela sua capacidade de mobilizar concepções para obter êxito nestas, sendo que as concepções evoluem gradativamente, conforme o indivíduo experiencia novas situações (Gitirana *et al.*, 2014).

Todavia, o conceito de competência isoladamente não se configura como um conceito científico, para tanto o autor recorre ao conceito de esquema. Confrontando competências e esquemas, os esquemas são os componentes das competências, seus objetivos, regras, invariantes e inferências (Vergnaud, 2002). Assim, os processos de filiações e rupturas operados por um sujeito, remetem diretamente ao conceito de esquema. Vergnaud (1993, p. 2) compreende esquemas como “[...] a organização invariante do comportamento para uma classe de situações dada”, todavia tomando como perspectiva a própria TCC, uma definição isolada não basta para compreender a interpretação dada aos esquemas (Vergnaud, 1993, 2003), afinal “[...] um conceito não pode ser reduzido à sua definição” (Vergnaud, 1993, p. 1). Devido ao fato da complexidade da concepção, convém o aprofundamento na compreensão de esquema dada pelo autor.

Vergnaud (2019) defende que esquemas funcionam como uma organização invariante da atividade para uma determinada classe de situações e os divide em quatro componentes: (I) objetivo, subobjetivo e antecipações; (II) regras de ação, de tomada de informações e de controle; (III) invariantes operatórios, compreendidos como conceitos em ação e teoremas em ação; e (IV) possibilidades de inferência em situação.

Dentre esses componentes, os invariantes operatórios, lidos como conceitos em ação e teoremas em ação, são descritos por Vergnaud (2008a) como o

componente mais decisivo do ponto de vista cognitivo. Vergnaud (1993) estabelece que os invariantes operatórios podem ser entendidos como modelos para descrever a conduta de um indivíduo, sendo que um teorema em ação é uma proposição que pode ser verdadeira ou falsa, enquanto um conceito em ação não é verdadeiro nem falso, é apenas pertinente ou não a uma situação (Vergnaud, 1996a, 2009b).

Além disso, o pesquisador chama atenção para o fato de que um conceito em ação não é estritamente um conceito, pois nem um teorema em ação é de fato um teorema. De modo geral, nas ciências, conceitos e teoremas são explícitos e passíveis de serem analisados quanto a sua pertinência e veracidade, porém os invariantes operatórios não recaem sob essa ideia. Conceitos e teoremas explícitos são apenas uma parcela do processo de conceitualização, o qual também engloba uma parte oculta, compreendendo essa àquilo que Vergnaud denomina como invariantes operatórios (Vergnaud, 1993, 2009b).

Em estreita relação aos invariantes operatórios, encontram-se a forma operatória do conhecimento e forma predicativa do conhecimento, que são, segundo a TCC, indissociáveis (Pastré; Mayen; Vergnaud, 2019) e, mais ainda, que, isoladamente, essas formas não são suficientes para se obter a conceitualização, uma vez que a aprendizagem concerne a ambas (Vergnaud, 2008a). Todo conhecimento, quando é concebido como um processo de adaptação, comporta sempre duas propriedades complementares: ele é operatório, no sentido em que é graças ao conhecimento que as informações são coletadas, permitindo uma boa adaptação da ação; e ele é predicativo, ao identificar propriedades nos objetos, tanto quanto identifica relações, entre essas propriedades e entre o objeto e suas propriedades (Pastré; Mayen; Vergnaud, 2019). Nesse sentido, Vergnaud (2003) enfatiza a importância de propor situações que, ao serem desenvolvidas pelos estudantes, permitam aferir tanto sua competência ao fazer, representada pela forma operatória do conhecimento, quanto o saber explicar, representado, mas não limitado, pela forma predicativa do conhecimento.

A fim de compreender melhor as formas operatória e predicativa do conhecimento, Vergnaud, (2009b) apresenta o exemplo de um mecânico de máquinas. O mecânico realiza conserto nas máquinas com as quais trabalha e, para isso, ele manifesta invariantes que lhe permitem analisar o necessário e desprezar os aspectos irrelevantes durante o reparo. Ao sair de férias, ele passa instruções para um substituto, porém esse substituto não se mostra capaz de realizar os consertos.

Nesse exemplo, embora o mecânico seja capaz de efetuar consertos, ele não consegue expressar em palavras como determina os aspectos a serem considerados ou desprezados durante o reparo. Isso indica que a forma predicativa do conhecimento do mecânico não é equivalente ao seu conhecimento na forma operatória.

Apesar de o exemplo apresentado envolver a forma predicativa do conhecimento expressa em linguagem natural, neste caso o português (escrito ou falado), a forma predicativa abrange sistemas de significados e significantes que vão além da linguagem natural, a qual, embora receba uma posição de destaque, não é a única forma de expressão. Assim, muitas questões que concernem aos objetos e às ações podem ser colocadas em palavras e isso contribui para o processo de conceitualização, porém não o esgota (Vergnaud, 2002).

Essa ideia está alinhada com a afirmação de que a forma predicativa do conhecimento auxilia a forma operatória (Vergnaud, 2002), porém Vergnaud (2002, p. 14) expressa que “[...] a forma operatória do conhecimento é sempre mais rica que a forma predicativa”. Dessa maneira, a língua, falada ou escrita, bem como os símbolos utilizados na ciência (tabelas, diagramas e álgebra), desempenham um papel decisivo na conceitualização. A invariância da forma simbólica invariância dos conceitos, permitindo enunciar objetos e propriedades, que não são acessíveis à percepção direta.

Consoante ao que foi tratado até o momento, compreende-se o conceito de esquema dado por Vergnaud (1993, p.2) como “[...] a organização invariante do comportamento para uma classe de situações dada”, o que implica que são nos esquemas apresentados pelos indivíduos que os conceitos e teoremas em ação são identificados, isto é, elementos cognitivos que fazem com que as ações se tornem operatórias, ou seja, que as ações sejam executadas. Dessa forma, o conceito de esquema configura tanto uma continuidade das formas operatória e predicativa do conhecimento, sendo a passagem de um registro epistêmico para um registro pragmático (Pastré; Mayen; Vergnaud, 2019), quanto o próprio conhecimento operatório manifestado, uma vez que, a teoria representa o conhecimento predicativo, enquanto o esquema representa o conhecimento operatório (Vergnaud, 1996b; 2004; 2008a).

Nesse sentido, considerando que “designam-se pelas expressões ‘conceito em ação’ e ‘teorema em ação’ os conhecimentos contidos nos esquemas” (Vergnaud,

1993, p. 4), interessa, a esta pesquisa, compreender que, para se analisar tanto a forma operatória do conhecimento quanto a forma predicativa, manifestadas por estudantes em uma ação, necessariamente deve haver um olhar sobre os invariantes operatórios atrelados a essa ação. Essa ideia é reforçada uma vez que “[...] é o conceito de invariante operatório que permite articular numa visão unitária e sintética as duas formas de conhecimento” (Vergnaud, 1996b). Cabe ainda ter em mente que a passagem da forma operatória do conhecimento para a forma predicativa não é um movimento automático, e esquemas de enunciação são necessários para a explicitação ou a simbolização, de tal maneira, que a “[...] passagem, de uma forma operatória do conhecimento a uma forma predicativa feita de objetos, de propriedades e de relações enunciadas, é um dos maiores desafios da escola” (Vergnaud, 2008b).

Encaminhamentos metodológicos

O estudo desenvolvido consistiu na implementação de um instrumento de pesquisa, em que participaram quatro estudantes do 3º ano do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade da região centro-oeste do Paraná. O estudo teve início com a realização da observação de uma aula da disciplina de Didática da Matemática. O instrumento de pesquisa foi implementado junto à turma no dia 24 de julho de 2023. Participaram do estudo quatro estudantes, sendo esse o total de discentes que estavam frequentando a disciplina no período de realização do estudo.

O instrumento foi composto por três situações-problema, mas, para este artigo, é apresentada, apenas, a análise da situação-problema 1. A opção por analisar a situação-problema 1 se deu considerando os seguintes aspectos: essa situação-problema apresentou, dentre as três, uma maior riqueza de diálogos; todos os participantes apresentaram resoluções que atendiam ao enunciado; e as resoluções apresentadas continham distinções entre si.

Para a implementação, os estudantes foram divididos em duas duplas, e cada dupla recebeu duas cópias do instrumento. Os estudantes concordaram com a gravação em áudio de seus diálogos. Foi esclarecido que cada dupla teria até o final da aula para realizarem a resolução, totalizando 1h15min disponíveis para resolução, e que o uso de calculadoras era permitido.

No dia 26 de julho de 2023, dois dias após a implementação do instrumento, cada dupla participou de uma entrevista, a qual teve como objetivo evidenciar

aspectos que possivelmente não foram identificados nos protocolos dos estudantes ou nas gravações dos diálogos realizadas durante a implementação. No período entre a implementação e a entrevista, os protocolos de resolução e as gravações dos diálogos entre os estudantes durante a resolução passaram por uma análise prévia a fim de tornar as perguntas das entrevistas mais contextualizadas quanto ao que cada dupla apresentou como resolução.


No dia 31 de julho de 2023, foi proposto aos estudantes um momento de diálogo, no qual eles apresentaram as resoluções desenvolvidas para cada situação-problema. Foi sugerida uma discussão quanto às diferentes possibilidades de resolução para cada situação-problema. Embora esse momento não esteja contemplado nas análises, ele se mostrou pertinente ao propor um fechamento para os estudantes que participaram do estudo.

Por fim, considerando as iterações dialógicas estabelecidas entre os estudantes, juntamente com os esquemas apresentados por eles, tanto em suas falas quanto em seus protocolos, foi possível analisar as manifestações da forma operatória do conhecimento, representada por teoremas em ação, e da forma predicativa do conhecimento.

Resultados e Discussão

Para uma melhor organização do texto e buscando preservar a identidade dos sujeitos, cada dupla foi nomeada com a palavra “Dupla”, seguida de um número de identificação, e cada estudante foi referenciado pela palavra “Estudante” seguida de um número de identificação, de forma que a Dupla 1 foi composta pelos Estudantes 1 e 2, e a Dupla 2 foi composta pelos Estudantes 3 e 4.

A seguir é apresentada a situação-problema implementada e analisada na pesquisa.

Figura 1: instrumento de pesquisa


A sorveteria, *Latte Dulce*, precisa realizar uma projeção do seu lucro sobre a venda de sorvetes. Para isso, realizou o levantamento dos seguintes custos de produção para cada 12 litros de sorvete, gasta-se: R\$ 30,00 em leite; R\$ 10,00 em açúcar; e R\$ 25,00 em outros insumos. A sorveteria possui alguns custos fixos mensais que totalizam R\$ 12.110,00. Além desses, há ainda um custo de R\$ 0,50 por sorvete referente às casquinhas em que o sorvete é servido.

A sorveteria vende cada unidade de sorvete por R\$ 8,00, e cada um possui em média 300 ml de sorvete.

Apresente a projeção do lucro da sorveteria *Latte Dulce* sobre a venda de sorvetes para o período de um mês.

Fonte: os autores

Dentre os critérios assumidos para elaboração da situação-problema, foi considerada a ausência de subitens no enunciado, bem como não foram utilizados termos que direcionassem os estudantes para o emprego de funções em suas resoluções. Ambas as duplas chegaram ao mesmo resultado, todavia o caminho de resolução apresentado por cada dupla teve algumas distinções. Nesse sentido, para organizar as análises, os protocolos dos estudantes foram interpretados seguindo a ordem em que as resoluções foram desenvolvidas. Com isso, também, buscou-se, aproximar as análises das etapas que foram desenvolvidas de forma similar entre as duplas.

O primeiro dado apresentado pelo enunciado corresponde ao volume de sorvete produzido por lote. Uma vez que o volume de sorvete comercializado é dado em mililitros, os estudantes tinham como opção transformarem os mililitros em litros ou os litros em mililitros. Ambas as duplas optaram por transformar o volume de 12 litros para mililitros e ambas, a princípio, afirmaram que 12 litros seriam equivalentes a 1200 mililitros. Porém, as duplas rapidamente perceberam o erro, apontando a conversão correta. Considerando que pouco tempo após a afirmação inicial, os estudantes reconheceram seu erro, foi possível inferir que isto se tratou de um erro pontual associado a uma multiplicação incorreta, e não a uma concepção incorreta sobre o volume em mililitros equivalente ao volume em litros.

Essa relação de proporcionalidade apresentada pode ser expressa matematicamente como $\frac{1}{12} = \frac{1000}{x}$, ou ainda, $f(12 * 1) = 12 * 1000$. Esse Teorema em Ação Verdadeiro - TAV foi manifestado de forma implícita pelos Estudantes 3 e 4, e de maneira explícita pelos Estudantes 1 e 2, conforme a Figura 2.

Figura 2: Recorte 1 da resolução da Dupla 1

$$\begin{array}{l} 1 \text{ l} - 1000 \text{ ml} \\ 12 \text{ l} - 12000 \end{array}$$

Fonte: Acervo da pesquisa

Esse teorema em ação verdadeiro foi identificado pela sigla TAV1 e pode ser modelado, ao considerar $f(x)$ uma relação proporcional entre duas grandezas, conforme descrito a seguir.

TAV1: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$, com $k, x \in \mathbb{R}$ e sendo k a razão (um escalar).

Esse teorema em ação é mencionado por Vergnaud (1996c) como um exemplo quanto às propriedades de isomorfismo da função linear. Pavan (2010) e Rodrigues (2021) identificaram o TAV1 em resoluções de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental em situações multiplicativas e mistas. Esse teorema em ação também foi identificado por Calado (2020) e Siqueira (2023) junto a estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental e do 2º ano do Ensino Médio, respectivamente.

Uma vez realizada a proporção entre os litros e mililitros produzidos, os estudantes passaram a considerar a quantidade em unidades produzidas em um lote. Para isso, as duplas associaram o volume dado em mililitros ao volume presente em cada unidade de sorvete comercializada. A Dupla 2 apresentou essa proporção de maneira explícita, conforme o seguinte cálculo.

Figura 3: Recorte 1 da resolução da Dupla 2

$$\frac{1000 \text{ ml}}{300 \text{ ml}} = 40 \text{ unidades}$$

Fonte: Acervo da pesquisa

Já a Dupla 1 não apresentou, no protocolo e nem nos diálogos, o esquema utilizado para obtenção do quantitativo de sorvetes em um lote produzido, tanto no protocolo, quanto em seus diálogos. Apesar de a Dupla 1 não ter explicitamente apresentado o procedimento para obtenção do quantitativo, é possível inferir que as associações realizadas foram as mesmas da Dupla 2. Isso pode ser confirmado pela fala do Estudante 1, ao comentar: “vamos fazer um cálculo, 12 litros, ó presta atenção,

cada sorvete 300 ml, então com 12 litros ele faz 40 sorvetes, concorda?”, evidenciando as grandezas associadas.

Com base nisso e em esquemas apresentados por Rodrigues (2021) e Siqueira (2023), a relação entre essas grandezas foi associada à propriedade padrão do coeficiente de proporcionalidade. Essa relação é caracterizada pelo teorema em ação verdadeiro identificado pela sigla TAV2.

TAV2: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $x = \frac{f(x)}{a}$, com $x, a \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$.

Essa relação de proporcionalidade entre duas grandezas está presente em resoluções de estudantes desde o 5º ano do Ensino Fundamental (Rodrigues, 2021), assim como de estudantes do Ensino Médio (Bernardino, 2022; Siqueira, 2023). Nesse sentido, é natural que tal teorema em ação também seja manifestado por estudantes do Ensino Superior.

Uma vez estabelecida a quantidade de sorvetes produzidos no lote, ambas as duplas buscaram estabelecer o custo total com as casquinhas em que o sorvete é servido. Embora esse procedimento seja uma etapa desnecessária para a resolução, ele não se caracteriza como um teorema em ação falso, uma vez que não há qualquer erro lógico ou procedimental em sua realização. Essa operação se refere à propriedade padrão do coeficiente de proporcionalidade (Vergnaud, 1996c). Matematicamente, essa proporcionalidade é representada como $f(40) = 0,5 * 40 = 20$ e como teorema em ação esta é expressa conforme descrito pelo TAV3 a seguir.

TAV3: Seja f uma relação de proporcionalidade e a a taxa, então $f(x) = a \cdot x$, com a e $x \in \mathbb{R}$.

Esse teorema em ação também foi identificado em estudantes do Ensino Fundamental e Médio (Rodrigues, 2021; Siqueira, 2023). Nenhuma das duas duplas indicou, em suas resoluções, diretamente o teorema em ação descrito, ambas apresentaram apenas o resultado da operação. Porém, em seus diálogos, a operação realizada é evidenciada, conforme apresentado no trecho de diálogo extraído da Dupla 2:

Estudante 4: *será que a gente olha aqui, tipo assim... sei lá... 8 a cada... possui em média 300 ml de sorvete, então por exemplo, aqui tem 12 litros né? Que é 1200 ml, 1200 ml, quantos, em cada casquinha possui 300 ml de sorvete, então a gente precisa dividir o 1200 por 300 para saber quantas casquinhas ele vai...*

Estudante 3: *vai dar 400? Não.*

Estudante 4: *1200 ml, dividido por 300 ml.*

Estudante 3: *não, 12 litros é 12000 ml.*

Estudante 4: *12000, ah é verdade.*

Estudante 3: *tá aqui, 40 casquinhas, então eu vou precisar de 40 casquinhas.*

Estudante 4: *então vai ser quantos reais, 40 vezes 50 centavos?*

Estudante 3: *20 reais, então 20 reais de casquinha.*

Estudante 4: *para produzir 12 litros de sorvete.*

Estudante 3: *isso, no caso é 40 sorvetes e cada sorvete custa 8 reais, então vai ser os 40, vezes 8, 320 é o valor vendido, se ele vender tudo.*

Estudante 4: *uhum.*

Neste diálogo, a Dupla 2 expõe o esquema mobilizado para obter o custo total com casquinhas para 40 sorvetes. Ainda com base nesse fragmento, é possível identificar o primeiro teorema em ação falso. As duplas 1 e 2, em um primeiro momento, associaram a quantidade de sorvetes produzidos em um lote ao total de sorvetes comercializados, indicando como 320 reais a receita total da sorveteria. Assim, embora a situação-problema assumisse a quantidade de sorvetes comercializados como variável, neste momento os estudantes empregam um valor fixo para uma variável. Esse teorema em ação falso é apontado, também, nas pesquisas desenvolvidas por Siqueira (2023) e Calado (2020), sendo descrito da seguinte maneira.

TAF1: Uma variável qualquer x é associada a um valor fixo.

Essa resistência em se trabalhar com generalizações é tratada por Tinoco (2011). A autora afirma que a maioria dos estudantes generaliza fatos, buscando verificar sua validade apenas para casos particulares. Porém, em contraste aos resultados apresentados por estudantes do Ensino Fundamental e Médio nas pesquisas de Siqueira (2023) e Calado (2020), aqui os estudantes notaram que o valor fixo associado à variável geraria problemas frente ao contexto da situação-problema ou não responderia à questão principal.

Essa percepção levou as duplas a compreenderem que a quantidade de sorvetes vendidos é uma variável, fazendo com que a situação-problema recaia sobre uma função. Essa compreensão pode ser notada nas falas dos Estudantes 3 e 4:

Estudante 3: *mas não dá pra saber, por que eu não sei quanto que ele produz no mês. Isso aqui, mas a gente vai depender do tanto de casquinha que ele vai vender.*

Estudante 4: *então a gente vai fazer algo tipo assim, a gente vai... tipo uma função, que a gente vai substituir sempre a quantidade de sorvete vendida, entendeu?*

Estudante 3: *é.*

Estudante 4: *que daí vai dar uma projeção, a partir de tal quantia ele passa a ter um lucro, entendeu?*

Estudante 3: *uhum.*

A partir deste ponto, as resoluções apresentadas pelas duplas assumem escolhas distintas, porém essas escolhas não alteram substancialmente as resoluções apresentadas pelos estudantes ou teoremas em ação mobilizados, mas sim a ordem com que eles são mobilizados. Neste momento, as duplas abordaram os custos de produção para 12 litros de sorvete e sua relação com a quantidade de sorvetes produzidas por um lote. A Dupla 1 realizou a soma dos custos de produção, obtendo o custo total de um lote, em que, numericamente, a operação é apresentada da seguinte maneira, $30 + 10 + 25 + 20 = 85$. Essa operação se relaciona a uma estrutura aditiva de parte todo, sendo que dadas as partes, busca-se o todo, e representa um teorema em ação verdadeiro expresso da seguinte maneira:

TAV4: Se P é uma parte e T é o todo, então $T = P_1 + P_2 + \dots + P_n$, com T e $P \in \mathbb{R}$.

Esse teorema está associado a uma das estruturas aditivas de menor complexidade, consistindo em um dos primeiros tipos de situações aditivas esquematizados por criança. Esse tipo de situação-problema e o procedimento por ela requisitado, isto é, juntar partes para encontrar um todo, estão presentes dentre as primeiras representações de adição, que, em geral, são associados ao processo de contagem (Magina *et. al*, 2008).

Diferentemente, a Dupla 2 optou por realizar a divisão do valor de cada custo pelo total de sorvetes produzidos. Essa operação resultou nos custos de cada ingrediente para a produção de uma unidade de sorvete, conforme a Figura 4:

Figura 4: Recorte 2 da resolução da Dupla 2 para a situação-problema 1

	= 40 unidades x
30,00 leite	↓
40,00 açúcar	0,75 leite
25,00 outros	0,25 açúcar
20,00 casquinha	0,625 outros
	0,50 casquinha
	<hr/>
	2,125 } custo

Fonte: Acervo da pesquisa

A estratégia apresentada pelos Estudantes 3 e 4 na Figura 3 corresponde a duas etapas de resolução desenvolvidas. A primeira etapa corresponde à uma sucessão de divisões dos custos dos ingredientes pelo número de sorvetes produzidos por lote. A proporcionalidade desenvolvida por essa dupla corresponde à propriedade padrão do coeficiente de proporcionalidade (Verghnaud, 1996c), assim como o TAV2, porém, aqui, o que se busca é a taxa. Dessa forma, há um teorema em ação verdadeiro, identificado pelo código TAV5, o qual foi modelado considerando $f(x)$, uma relação de proporcionalidade entre duas grandezas conforme descrito a seguir:

TAV5: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $a = \frac{f(x)}{x}$, com $x, a \in \mathbb{R}$, sendo $x \neq 0$.

Ferraz (2016) e Rodrigues (2021) identificam esse teorema em ação verdadeiro ao analisarem situações junto a estudantes do 5º e do 6º ano do Ensino Fundamental. Ainda na Figura 3, os Estudantes 3 e 4 manifestam o TAV4, operando a soma dos resultados obtidos pelo emprego do TAV5, e, assim, obtiveram o custo por unidade de sorvete comercializada.

Já os Estudantes 1 e 2 obtiveram esse mesmo valor por meio de uma estratégia distinta. Estes optaram por realizar primeiro a soma dos custos (TAV4) para, na sequência, realizar apenas uma operação de divisão (TAV5), obtendo, assim, o mesmo custo unitário por meio de um processo mais econômico, no sentido de que um número menor de operações foi realizado.

Uma vez que os Estudantes 1 e 2 obtiveram o custo unitário, eles estabeleceram uma relação entre o preço de venda e os custos unitário e mensal da sorveteria. A dupla 1 realizou a subtração do custo unitário do preço de venda, obtendo o lucro unitário de R\$ 5,875. Munidos desse valor, e dos custos mensais fixos da sorveteria, era esperado que a dupla estabelecesse a função demandada pelo enunciado. Todavia, o Estudante 1 sugeriu que fosse realizada a divisão do custo fixo da sorveteria pelo custo unitário, conforme apresentado pelo excerto a seguir:

Estudante 1: tá, cada sorvete vendido é lucrado 5 reais virgula esse valor, então pega esse valor, multiplica por menos 1, ou melhor ainda, pega 12110 e divide por esse valor.

Estudante 2: por quê?

Estudante 1: porque é o custo que ele tem, a cada sorvete ele tem esse lucro, a despesa dele é 12110, eu dividi esse valor aqui, esse valor é a quantidade de sorvetes que ele precisa vender pra ele cobrir as despesas.

Estudante 2: ele ainda não tem lucro ele só paga a conta.

Estudante 1: ele ainda não tem lucro, agora depende de quanto sorvete ele vai vender no mês, né?

Embora não manifestado de forma escrita ou verbal, é possível inferir, considerando o diálogo destes estudantes, que foi realizada uma operação semelhante à $x = 12110/5,875$, ao considerarem $f(x) = 0$ por meio da expressão “quantidade de sorvetes que ele precisa vender para ele cobrir as despesas”. Esse esquema apresentado corresponde a um teorema em ação verdadeiro, que pode ser modelado como:

TAV6: Se $f(x) = ax + b$, então $x = \frac{f(x)-b}{a}$, com a, x e $b \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$.

Para além disso, há ainda na terceira frase do trecho transcrito, na fala do Estudante 1, uma intenção em comunicar o esquema empregado, mesmo que essa comunicação não reflita a totalidade ou mesmo a profundidade de tal esquema. Na fala do estudante, há, ademais, uma atribuição de significado ao resultado encontrado. Dessa forma, é possível apontar na fala do Estudante 1, com base em Vergnaud (1996b, 2004), uma manifestação da forma predicativa do conhecimento, associada ao TAV6.

Nesse ponto, a Dupla 1 havia encontrado tanto a taxa quanto o coeficiente linear da função esperada como solução para a situação-problema, todavia, é possível inferir que os estudantes não realizaram a associação entre os valores encontrados e

os coeficientes, uma vez que cálculos adicionais foram realizados para a obtenção da função. Os cálculos adicionais estão dispostos na Figura 5.

Figura 5: Recorte 2 da resolução da Dupla 1

$$y = ax + b$$

$$-12110 = b$$

$$0 = a \cdot 2062 + b$$

$$a = \frac{12110}{2062}$$

Fonte: Acervo da pesquisa

A Figura 5 apresenta dois cálculos realizados pela dupla, o primeiro, $-12110 = b$, é resultado da seguinte operação $-12110 = a \cdot 0 + b$ e retorna, como resultado para a dupla, o coeficiente linear da função, que é dado pelo enunciado. Mesmo que o valor tenha sido fornecido pelo enunciado, a dupla manifesta um teorema em ação verdadeiro na busca do coeficiente linear da função. Esse TAV pode ser modelado da seguinte maneira.

TAV7: Se $f(x) = ax + b$, então $f(0) = b$, com a, b , e $x \in \mathbb{R}$.

Conforme o último trecho de transcrição apresentado, a dupla compreendeu que o gráfico deveria tocar o eixo y em -12110 , por esse ser o custo fixo da sorveteria, porém a dupla não realizou a associação imediata desse valor ao coeficiente linear. Isso pode ser consequência da falha de compreensão do conceito de função ou de uma leitura irregular do enunciado.

Na segunda operação realizada, a dupla buscou pela taxa, que também já havia sido determinado anteriormente por meio da divisão do custo de produção do lote pela quantidade de sorvetes produzidas, $85/40 = 5,875$. Porém, a dupla utilizou uma aproximação do resultado obtido pela operação $x = 12110/5,875$, que resultou em aproximadamente 2061,28 para determinar $y = 0$. Com isso, é possível inferir que a Dupla 1 compreendeu que o contexto do enunciado pressupõe que a quantidade de sorvetes comercializada está contida dentro do domínio dos números inteiros e, por conta disso, foi utilizada a aproximação $12110/5,875 \approx 2062$. Porém, aqui, parece haver uma possível incompreensão da dupla quanto às operações realizadas, uma

vez que a dupla utilizou uma aproximação de $12110/5,875$, 2062 para obter o denominador desta mesma operação, $5,875$, ao calcular, $12110/2062 \approx 5,873$.

Assim, embora a dupla tenha manifestado um conhecimento verdadeiro, que pode ser modelado pelo teorema em ação verdadeiro TAV8, a dupla o emprega utilizando aproximações obtidas em cálculos anteriores, buscando determinar os mesmos valores utilizados em tais cálculos. Esse teorema em ação também é apontado por Siqueira (2023) em estudantes do Ensino Médio.

TAV8: Se $f(x) = ax + b$, então $a = \frac{f(x)-b}{x}$, com a, x e $b \in \mathbb{R}$ sendo $x \neq 0$ e a a taxa.

Já os Estudantes 3 e 4, uma vez que haviam encontrado o custo unitário, buscaram encontrar a função associada à situação-problema, conforme apresentado na Figura 6.

Figura 6: Recorte 3 da resolução da Dupla 2 para a situação-problema 1

$$F(x) = 8x - 2,125x - 12.110,00$$

$$F(x) = 5,875x - 12.110,00$$

Fonte: Acervo da pesquisa

Como um passo intermediário para obtenção da função apresentada como resolução para a situação-problema, a Dupla 2 considerou os valores, preço de venda e custo unitário, em função de x , operando a subtração das taxas. Essa operação pode ser modelada na forma de um teorema em ação verdadeiro, o TAV9, descrito como:

TAV9: Se F é o estado final, I o estado inicial e T a transformação, então $F = I \pm T$.

Essa operação, realizada pela dupla, $8x - 2,125x$, foi classificada, nesta pesquisa, como uma etapa intermediária de transformação de medidas, pois esse teorema em ação verdadeiro também é manifestado por estudantes do Ensino Fundamental (Rodrigues, 2021) e por estudantes do Ensino Médio (Siqueira, 2023)

ao resolverem situações mistas da classe de proporção simples e transformação de medidas.

Ainda, é possível verificar que, na Figura 5, os Estudantes 3 e 4 manifestaram um segundo teorema em ação verdadeiro, associado particularmente a ideias correspondentes à função afim, ao definirem $f(x)$ como uma relação funcional que representa uma função afim em que a é a taxa e b é o coeficiente linear. Esse teorema em ação pode ser modelado como:

TAV10: Se a é a taxa e b é o coeficiente linear, então a relação funcional f é dada por

$$f(x) = ax + b.$$

Esse teorema em ação também é manifestado na resolução apresentada pelos Estudantes 1 e 2 e foi identificado nas pesquisas de Rodrigues (2021) e Siqueira (2023) junto a estudantes do Ensino Fundamental e Médio. Neste ponto, novamente, as resoluções das duas duplas se distanciam. A Dupla 2, após ter obtido a função esperada como resposta para a situação-problema, voltou a manifestar o TAF1, ao operar $f(40)$. Porém, conforme o trecho de diálogos apresentados na sequência, parece haver uma incompreensão quanto ao significado do resultado encontrado, -11.875 .

Estudante 4: *que daí vai ficar 8 menos 2, 125, mas daí não vai ter...*

Estudante 3: *5,875 x, vezes x, menos, 12110.*

Estudante 4: *ái a gente substitui, tem que igualar ela... quantos sorvetes?*

Estudante 3: *40.*

Estudante 4: *ái a gente substitui aqui 40 pra ver se vai dar o 320.*

Estudante 3: *bora.*

Estudante 4: *hora da verdade.*

Estudante 3: *tomara que dê certo, meu Deus.*

Estudante 4: *40 né? 40... onde erramos?*

Percebe-se que, embora os Estudantes 3 e 4 não tenham compreendido, em um primeiro momento, o significado da operação que haviam realizado, eles compreendem que havia um erro. Porém, o erro por eles identificado não correspondia à substituição de um valor qualquer na variável, mas ao valor negativo obtido. A dupla, então, retoma os dados do enunciado e os cálculos realizados na busca por possíveis erros. Durante a revisão realizada pela dupla, em dois momentos, foram encontradas evidências de manifestações da forma predicativa do conhecimento, sendo cada momento manifestado por um dos estudantes da dupla, conforme o trecho a seguir:

Estudante 4: só que tem uma coisa...

Estudante 3: diga.

Estudante 4: tipo assim, não quer dizer que... não quer dizer que tipo, a cada sei lá, 30 sorvetes vendidos ele vai ter esse custo aqui, esse custo aqui é em relação ao mês, tipo assim, as vezes ele vende 300 sorvetes por dia, no mês o custo fixo é esse, e quando a gente substitui, tipo, 40 sorvetes aqui, a gente tá assumindo que ele tem esse custo em relação a 40 sorvetes, entendeu?

Estudante 3: entendi, os 12000 é no mês, esses outros ali a gente não tá considerando no mês.

(outras discussões)

Estudante 4: acho que tá certo, por que aqui, vai dar uns 225 reais, aqui...

Estudante 3: é para estar certo... por que qual que é o lucro por casquinha? É os 8 reais menos o custo, que é isso aqui. Ok, e eu tenho um gasto fixo, a diferença é que esse gasto fixo é no mês, daí é o lucro mensal.

Estudante 4: eu acho que é isso.

Estudante 3: eu também.

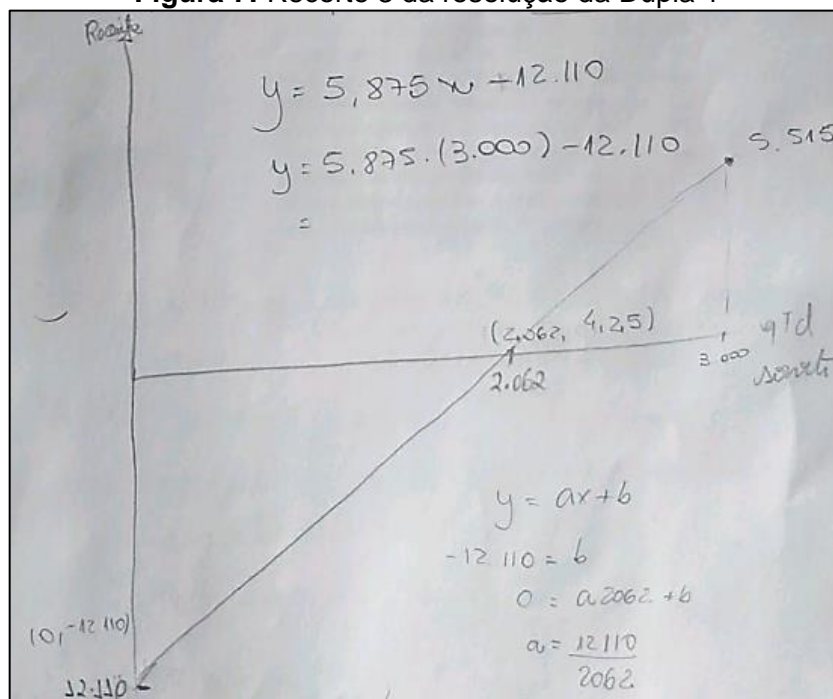
Estudante 4: então é isso aqui, vamos para a outra.

Na terceira frase do excerto, referente ao Estudante 4, há uma tentativa de explicar a seu colega a relação entre a quantidade de sorvetes vendidos e os custos fixos e variáveis da sorveteria. Essa enunciação corresponde, em parte, ao esquema associado ao TAV10, em que o Estudante 4 expõe características da relação funcional estabelecida pela situação-problema. Ainda nessa mesma citação, o estudante manifesta ideias-base de função, como variável e dependência. Já na sexta frase do trecho de transcrição, o Estudante 3 conclui que a relação estabelecida para situação-problema está correta e, no fechamento de sua fala, explicita o esquema relacionado ao TAV9, ao mencionar a operação realizada pela dupla: $8x - 2,125x = 5,875x$. O estudante 3 ainda explicita a relação do resultado obtido na operação matemática citada ao esquema mobilizado pelo TAV10.

Em ambos os trechos, os estudantes expressam, em suas falas, operações, conhecimentos ou esquemas que haviam sido manifestados anteriormente. No entanto, tais falas, nesse momento, assumem uma expressa intencionalidade de comunicação, sendo esse fator determinante para o apontamento de tais trechos como indícios de manifestações da forma predicativa do conhecimento.

Por fim, a Dupla 1, como meio para representar a projeção do lucro demandada pelo enunciado, construiu um gráfico para representar a função obtida.

Figura 7: Recorte 3 da resolução da Dupla 1



Fonte: Acervo da pesquisa

Quanto ao gráfico construído, alguns apontamentos podem ser realizados. O primeiro compete ao domínio da função obtida, em que a reta é disposta somente para $x \geq 0$, mostrando que a dupla compreendeu que a variável somente pode assumir valores maiores ou iguais a zero, pois esta representa o número de sorvetes vendidos. Ainda quanto ao domínio, a dupla não indica $y = 0$, pois esse valor corresponde a um número racional, indicando o ponto mais próximo em que $y > 0$. Porém, é possível que essa compreensão, quanto ao domínio, não está bem estabelecida, uma vez que a dupla utiliza uma reta para representar uma função cujo domínio está contido em \mathbb{N} .

O segundo aspecto a ser analisado no gráfico é a manifestação de um teorema em ação falso, TAF1, quando a dupla apresenta um valor específico para representar uma quantidade qualquer. A dupla indica o ponto 3000,5515, um ponto escolhido ao acaso, conforme indicado na fala do Estudante 1 “*como ele quer a quantidade de sorvete, a gente vai projetar o gráfico, certo? Com um valor aleatório aqui*”.

Por fim, cabe o apontamento da própria construção de um gráfico como escolha da Dupla 1 para representar a resolução. A forma predicativa do conhecimento está associada a uma intenção de comunicação, que pode ser realizada tanto por meio da linguagem natural, quanto de forma simbólica, dada por tabelas, diagramas, álgebra, o que, neste caso particular, ocorre por meio de um

gráfico (Vergnaud, 2002, 2004). Nesse sentido, a apresentação de um gráfico como meio para expressar a função obtida, assim como representar a projeção de lucro solicitada pelo enunciado, pode ser classificada como uma expressão do conhecimento predicativo desses alunos.

No entanto, é importante ressaltar que, mesmo que a representação gráfica contiver erros, isso não a invalida como manifestação do conhecimento predicativo, uma vez que essa forma pode auxiliar a forma operatória do conhecimento (Vergnaud, 2002), embora somente parte dos conhecimentos utilizados na ação pode ser expressos por palavras, assim como é possível que formulações sejam estabelecidas de maneira falsa ou inconsistente (Vergnaud, 2000).

A partir da análise das estratégias de resolução das duplas, foram identificados os teoremas em ação manifestados pelos estudantes de Licenciatura em Matemática ao resolverem a situação-problema proposta. O Quadro 1 sintetiza os teoremas em ação, verdadeiros e falsos, acompanhados dos indícios de suas manifestações.

Quadro 1: Teoremas em ação identificados na pesquisa

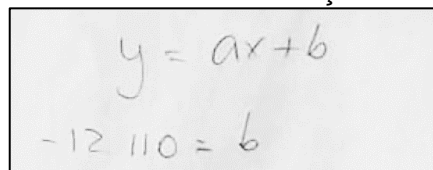
Indícios dos teoremas em ação	Modelação dos teoremas em ação (verdadeiros e falsos)
Ao multiplicar a razão (k) por $f(x)$.	TAV1: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$, com $k, x \in \mathbb{R}$ e sendo k a razão (um escalar).
Ao dividir $f(x)$ pela taxa de proporcionalidade (a) para determinar (x).	TAV2: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $x = \frac{f(x)}{a}$, com $x, a \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$.
Ao multiplicar a taxa de proporcionalidade (a) por (x).	TAV3: Seja f uma relação de proporcionalidade e a a taxa, então $f(x) = a \cdot x$, com a e $x \in \mathbb{R}$.
Ao somar as partes (P) para determinar o todo (T).	TAV4: Se P é uma parte e T é o todo, então $T = P_1 + P_2 + \dots + P_n$, com T e $P \in \mathbb{R}$.
Ao dividir $f(x)$ por (x) para determinar a taxa de proporcionalidade (a).	TAV5: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $a = \frac{f(x)}{x}$, com $x, a \in \mathbb{R}$, sendo $x \neq 0$.
Ao dividir $f(x)$ menos a constante (b) pela taxa de proporcionalidade (a) para determinar (x).	TAV6: Se $f(x) = ax + b$, então $x = \frac{f(x)-b}{a}$, com a, x e $b \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$.
Ao considerar $x = 0$, para obter a constante (b).	TAV7: Se $f(x) = ax + b$, então $f(0) = b$, com $a, b, e x \in \mathbb{R}$.
Ao dividir $f(x)$ menos a constante (b) por (x) para determinar a taxa de proporcionalidade (a).	TAV8: Se $f(x) = ax + b$, então $a = \frac{f(x)-b}{x}$, com a, x e $b \in \mathbb{R}$ sendo $x \neq 0$ e a a taxa.
Ao realizar a transformação (T) ao estado inicial (I) para encontrar o estado final (F).	TAV9: Se F é o estado final, I o estado inicial e T a transformação, então $F = I \pm T$.
Ao somar a constante (b) com a multiplicação da taxa de proporcionalidade (a) por (x) para obter $f(x)$.	TAV10: Se a é a taxa e b é o coeficiente linear, então a relação funcional f é dada por $f(x) = ax + b$.
Escolhe uma quantidade específica para representar uma quantidade qualquer.	TAF1: Uma variável qualquer x é associada a um valor fixo.

Fonte: Dados da Pesquisa, 2023

Nos esquemas mobilizados pelos alunos, foram identificados dez teoremas em ação verdadeiros e um teorema em ação falso. Foram identificados, ainda, ao menos, quatro momentos em que existiram indícios de manifestações da forma predicativa do conhecimento, sendo eles: o primeiro, em que o Estudante 1 explica o TAV6; o segundo, em que o Estudante 4 explica o TAV10 e evoca conhecimentos relacionados às ideias-base de função de variável e dependência; o terceiro, em que o Estudante 3 explica os TAV9 e TAV10; e o quarto momento, em que os Estudantes 1 e 2 apresentam uma representação gráfica da solução.

Diante disso, a discussão quanto a própria resolução apresentada pelos estudantes como uma possível manifestação da forma predicativa do conhecimento torna-se relevante. Considerando que a forma predicativa do conhecimento pode ser manifestada por meio de uma linguagem simbólica (Vergnaud, 2004; Régnier, 2009), as operações, registradas nos protocolos dos estudantes, não necessariamente corresponderam em sua totalidade a conhecimentos operatórios, pois este é, em sua maior parte, implícito (Vergnaud, 2004, 1993). O apontamento dos registros apresentados pelos estudantes nos protocolos como manifestações da forma predicativa do conhecimento recai sobre a intencionalidade com que eles foram realizados. Para exemplificar isso, são apresentados dois recortes, nas Figuras 8 e 9.

Figura 8: Recorte 4 da resolução da Dupla 1


$$y = ax + b$$
$$-12 // 0 = b$$

Fonte: Acervo da pesquisa

Na Figura 8, há uma operação realizada pela Dupla 2, para obter o coeficiente linear da função apresentada como solução para a situação. Conforme a operação, é possível inferir que o registro está apresentado no protocolo tão somente como uma organização do esquema mobilizado (TAV7) pelos estudantes e não visa comunicá-lo.

Figura 9: Recorte 4 da resolução da Dupla 2

0,75	leite
0,25	açúcar
0,625	outros
0,50	casquinha
<hr/>	
1,125	} custo por unidade

Fonte: Acervo da pesquisa

Já a Figura 8 apresenta um recorte da resolução realizada pela Dupla 2, em que os estudantes realizam a soma dos custos de cada ingrediente para obterem o custo por unidade. Aqui, embora não seja uma inferência tão direta, é possível considerar que a dupla, ao apresentar os valores acompanhados de seus significados, visa comunicar ao leitor o que está sendo realizado. Esse registro pode caracterizar uma manifestação da forma predicativa do conhecimento e uma manifestação explícita de um conhecimento operatório (TAV4). Considerando que a situação-problema não indicou a necessidade de apresentação de cálculos, somente da projeção do lucro, aqui compreendida como uma função afim, torna-se possível ponderar sobre a possibilidade de que os protocolos apresentados pelos estudantes compuseram, em si, manifestações da forma predicativa do conhecimento.

Considerações finais

Nos esquemas mobilizados pelos alunos, foram identificados dez teoremas em ação verdadeiros. Destes, oito teoremas em ação verdadeiros já haviam sido identificados em outras pesquisas, como de Calado (2020), Bernardino (2022), Rodrigues (2021) e Siqueira (2023). Dos dois teoremas em ação verdadeiros não identificados em outras pesquisas, o primeiro (TAV4) está associado a uma das estruturas aditivas de menor complexidade, configurado como juntar partes para encontrar um todo. O segundo teorema em ação verdadeiro, não identificado em outras pesquisas (TAV7), é manifestado na busca do coeficiente linear de uma função.

Ambas as duplas apresentaram estratégias de resolução adequadas para a situação-problema 1, chegando à função esperada como solução para a situação-problema. Todavia, as duplas manifestaram, por mais de uma vez, um teorema em ação falso (TAF1), em que uma variável qualquer x é associada a um valor fixo. Com

base nos diálogos entre as duplas, assim como nos protocolos apresentados pelos estudantes, torna-se perceptível a solidez que esse teorema em ação falso assume junto aos esquemas mobilizados pelos estudantes. Em diversos momentos, as duplas se desviaram de um caminho pertinente de resolução, atribuindo valores específicos à variável ou a alguma das grandezas envolvidas.

Outras pesquisas, como Calado (2020), realizada junto a estudantes do Ensino Fundamental, Bernardino (2022) e Siqueira (2023), ambas realizadas com estudantes do Ensino Médio, também apontaram para dificuldades dos estudantes em generalizar as situações e reconhecer as variáveis envolvidas. Alinhado a isso, este estudo indica que estudantes do Ensino Superior também manifestam dificuldades nesse sentido, pois buscaram associar uma variável qualquer x a um valor fixo.

Ao longo dos diálogos e dos protocolos apresentados pelos estudantes, foram identificadas possíveis manifestações da forma predicativa do conhecimento. As manifestações se apresentaram essencialmente quando: um estudante buscou explicar um resultado, operação, interpretação da situação-problema ou de suas etapas de resolução; e momentos em que os estudantes estavam interpretando dados ou organizando seus esquemas de forma explícita. Incluem-se, aqui, manifestações da forma predicativa do conhecimento relacionadas diretamente ao conceito de função de suas ideias-base.

Considerando que fórmulas, cálculos ou teoremas matemáticos são, por si, expressões da forma predicativa do conhecimento, uma vez que buscam expor um conhecimento e comunicá-lo (Vergnaud, 2004), ao analisar as resoluções apresentadas pelos estudantes, os termos e as descrições quanto ao significado daquela grandeza ou operação, pode caracterizar uma intenção de comunicação por parte do aluno.

Nesse sentido, os protocolos apresentados pelos estudantes podem ser entendidos como manifestações da forma predicativa do conhecimento. Porém, tal afirmação ainda demanda que novas análises sejam realizadas a fim de melhor fundamentá-la, uma vez que a forma predicativa do conhecimento não se limita ao saber explicar, e se entrelaça à forma operatória do conhecimento em determinadas passagens.

Referências

BERNARDINO, F. **Função Afim E Problemas Mistos**: uma investigação com estudantes do Ensino Médio. 2022. 173f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual do Paraná, Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática. Campo Mourão, 2022.

BERNARDINO, F. et al. Ideias-base do conceito de função mobilizadas por estudantes do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. In: CEOLIM, Amauri Jersi; REZENDE, Veridiana; HERMANN, Welington (org.). **Diálogos entre a Educação Básica e a Universidade**: reflexões acerca do conceito de função nas aulas de Matemática. Curitiba: CRV, 2019. p.51-70.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, SEB, 2018.

BRASIL. Resolução n. 2, de 20 de dezembro de 2019. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica. **Diário Oficial da União**: seção 1, Brasília, DF, n. 247, p. 115-119, 23 dez. 2019.

CALADO, T. V. **Invariantes Operatórios Relacionados À Generalização**: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim. 2020. 193 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática. Cascavel, 2020.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. 2 ed. Lisboa: Gradiva, 1998.

FERRAZ, S. R. **Investigando a aprendizagem de noções associadas ao campo multiplicativo**: um estudo com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG). 2016. 217 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Ouro Preto, 2016.

GITIRANA, V.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; SPINILLO, A. G. **Repensando Multiplicação e Divisão**: contribuições da teoria dos campos conceituais. 1. ed. São Paulo: Proem, 2014.

MAGINA, S. et al.; CAMPOS, T. M. M.; NUNES, T.; GITIRANA, V. **Repensando Adição e Subtração**: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. 3. ed. São Paulo: PROEM, 2008.

MERLI, R. F. **Do Pensamento Funcional ao Campo Conceitual de Função: o desenvolvimento de um conceito**. 2022. 215f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Cascavel, 2022.

NUNES, C. B.; SANTANA, E. R. S. Concepções Errôneas de Alunos de Licenciatura em Matemática sobre o Conceito de Função. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, Londrina, v.10, n.2, p. 65-71, 2017. Disponível em: <https://revista.pgsskroton.com/index.php/jieem/article/view/5503>. Acesso em: 09 out. 2022.

PASTRÉ, P.; MAYEN, P.; VERGNAUD, G. A didática profissional. In: GRUBER, C.; ALLAIN, O.; WOLLINGER, P. (Ed.). **Didática Profissional: Princípios e referências para a Educação Profissional**. Florianópolis: Publicação do IFSC, 2019. p. 11-87.

PAVAN, L. R. **A mobilização das ideias básicas do conceito de função por crianças da 4ª série do Ensino Fundamental e Situações-problema de Estruturas Aditivas e/ou Multiplicativas**. 2010. 195 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática. Maringá, 2010.

PIRES, R. F.; MERLINE, V.; MAGINA, S. Função: Concepções Manifestadas por um Grupo de Professores. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v.20, n.44, p. 21-29, 2015.

RÉGNIER, N. M. A.; MONIN, N. Da teoria dos campos conceituais à didática profissional para a formação de professores: contribuição da psicologia e da sociologia para a análise de práticas pedagógicas. **Revista Educação Unisinos**, São Leopoldo, v.13, n.1, p.1-12, 2009.

REZENDE, V.; NOGUEIRA, C. M. I.; CALADO, Tamires Vieira. Função afim na Educação Básica: estratégias e ideias-base mobilizadas por estudantes mediante a resolução de tarefas matemáticas. **Alexandria: Revista de Educação em Ciências e Tecnologia**, Florianópolis, v.13, n.2, p. 25-50, 2020.

RODRIGUES, C. L. H. **Invariantes operatórios associados ao conceito de função mobilizados por alunos do 5º ano do ensino fundamental**. 2021. 179 f. (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Cascavel, 2021. Disponível em: <http://tede.unioeste.br/handle/tede/5815>. Acesso em: 11 mar. 2023.

SIQUEIRA, F. K. S. **Complexidade de situações mistas associadas à fundação afim: uma investigação com estudantes do Ensino Médio**. 2023. 231f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual do Paraná, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática. Campo Mourão, 2023.

TINOCO, L. A. A. **Álgebra: pensar, calcular, comunicar**. 2. ed. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, 2011.

VERGNAUD, G. Teoria dos Campos Conceituais. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 1993, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática - UFRJ, 1993, p. 1-27.

VERGNAUD, G. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. **Revista do GEEMPA**, Porto Alegre, p. 9-19, 1996a.

VERGNAUD, G. Au fond de l'action, la conceptualisation. In: BARBIER, J. M. **Savoirs théoriques et savoirs d'action**. Paris: Paris Presses Universitaires de France, 1996b. p. 275-292.

VERGNAUD, Gérard. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, Jean (org.). **Didáctica das Matemáticas**. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996c, p.155-191.

VERGNAUD, G. A respeito de Frege. Tradução de Camila Rassi., In: SÉMINAIRE FRANCO-ITALIEN DE DIDACTIQUE DE L'ALGÈBRE, 3, Nice. **Actes...** (). Nice: IREM, 2000. Disponível em: <https://vergnaudbrasil.com/textos/>. Acesso em: 12 mar. 2023.

VERGNAUD, G. A incorporação dos professores na teoria dos campos conceituais: contribuição em homenagem a Claude Comiti. Tradução de Camila Rassi. In: JOURNÉE SCIENTIFIQUE EN L'HONNEUR DE CLAUDE COMITI, Grenoble. **Actes...**, 2000. p. 3-19. Disponível em: <https://vergnaudbrasil.com/textos/>. Acesso em: 16 fev. 2023.

VERGNAUD, G. A gênese dos campos conceituais. In: GROSSI, E. P. (Org). **Por que ainda há quem não aprende?** 2. ed. Petrópolis: Vozes, 2003. p. 21-64.

VERGNAUD, G. Pourquoi tant de bruit sur la compétence?. **Nouveaux Regards**. n. 24, p. 20-24. 2004.

VERGNAUD, G. Da didática das disciplinas à didática profissional, nada mais que um passo. Tradução de Maria Lucia Faria Moro. *Travail et Apprentissages*. p. 1-7, 2008a. Disponível em: <https://vergnaudbrasil.com/textos/>. Acesso em: 12 fev. 2023.

VERGNAUD, G. Cultura e conceitualização: Não há uma sem a outra. Tradução de Maria Lucia Faria Moro. **Carrefours de l'Éducation**, v.26, p. 83-98, 2008b. Disponível em: <https://vergnaudbrasil.com/textos/>. Acesso em: 12 fev. 2023.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: Editora UFPR, 2009a.

VERGNAUD, G. O que é aprender. In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Orgs.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: Editora CRV, 2009b. p. 13-35.

VERGNAUD, G. Quais questões a Teoria dos Campos Conceituais busca responder? **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, Online, v. 9, n. 1, 2019.

ZANATTA, L. F.; REZENDE, V. Conhecimentos de funções afim e quadrática manifestados por estudantes de licenciatura em matemática. **Revista Cocar**, v. 17, n. 35, p. 1-19, 2022. Disponível em: <https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/5292> Acesso em: 05 fev. 2023.